3.1 Niektoré vlastnosti lineárnych systémov

Systém diferenciálnych rovníc v tvare

$$x_i' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_i + b_i(t), i = 1,2,\ldots,n; t \in \langle a,b \rangle \qquad (3.1)$$

nazývame systémom lineárnych diferenciálnych rovníc prvého rádu .

Vektorovo-maticový zápis tohto systému je

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \ t \in J = \langle a,b \rangle . \qquad (3.2)$$

Ak maticová funkcia $\mathbf{A}(t)$ a vektorová funkcia $\mathbf{b}(t)$ sú spojité na J a $t_0 \in J$, tak sú splnené podmienky existencie a jednoznačnosti riešenia problému (3.2).

Ak matica $\mathbf{A}$ je konštantná v systéme (3.2), tak systém (3.2) sa nazýva **lineárny systém s konštantnými koeficientmi.**

Niektoré vlastnosti homogénnych lineárnych systémov

Ak $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$ pre $t \in J$, tak systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \ t \in J = \langle a,b \rangle \qquad (3.3)$$

sa nazýva **homogénny systém**.

Veta 3.1 *Nech* $\mathbf{A}(t)$ *je* $n \times n$ *spojitá matica na intervale* J. *Nech* $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)$ *je systém* n *lineárne nezávislých riešení systému (3.3). Matica* $\mathbf{U}$, *ktorej stĺpce sú* ***lineárne nezávislé*** *na* J *sa nazýva* ***fundamentálna matica*** *tohto systému na* J, *kde*

$$\mathbf{U}(t) = (\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)).$$

Funkcia

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{u}_i(t)$$

je všeobecným riešením systému (3.3).

V matici $\mathbf{U}$ sú stĺpce ***lineárne nezávislé*** na intervale J vtedy a len vtedy ak $\det(\mathbf{U}) \neq 0$ (Wronskian) pre každé $t \in J$.

Veta 3.2 (Abelova formula.) *Ak* $\mathbf{U}$ *je fundamentálna matica systému (3.3) na* J *a ak* t_0 *je nejaký bod z* J, *tak*

$$\det \mathbf{U}(t) = \det \mathbf{U}(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau) d\tau \right]$$

pre každé t *z* J.

Ak $\mathbf{U}$ je fundamentálnou maticou systému (3.3) a $\mathbf{K}$ je nenulová konštantná (komplexná) matica, tak $\mathbf{UK}$ je tiež fundamentálnou maticou systému (3.3) na J.

Fundamentálna matica systému (3.3) má nasledujúcu vlastnosť

$$\mathbf{U}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}, \ t \in J . \qquad (3.4)$$

Lineárne nehomogénne systémy

Systém diferenciálnych rovníc (3.2), kde $\mathbf{b}(t) \neq \mathbf{0}$ pre $t \in J$ sa nazýva **nehomogénny systém lineárnych diferenciálnych rovníc**.

Nech $\mathbf{b}(t)$ *je spojitá na intervale* J *a* $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_n(t)$ *je fundamentálny systém riešení systému*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Potom všeobecné riešenie systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ *môžeme vyjadriť v tvare*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{x}^*(t) \qquad (3.5)$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *sú ľubovoľné konštanty a* $\mathbf{x}^*(t)$ *je nejaké partikulárne riešenie systému*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \qquad (3.6)$$

Každé riešenie rovnice (3.2), spĺňajúce začiatočnú $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ môžeme vyjadriť v tvare

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{U}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau, t_0 \in J. \qquad (3.7)$$

Analogicky ako riešenie diferenciálnej rovnice

$x' = ax + b(t)$, $x_0 = x(t_0)$,

môžeme vyjadriť v tvare

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + e^{at}\int_{t_0}^{t} e^{-as}b(s)ds,$$

Tak aj riešenie sústavy lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi môžeme vyjadriť v tvare

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)ds.$$

Jednou z fundamentálnych matíc daného systému je teda aj matica $\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$.

Matica

$$\mathbf{U}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

je fundamentálnou maticou systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pre všetky $t \in (-\infty, \infty)$ s $\mathbf{U}(0) = \mathbf{E}$ a každé riešenie systému $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sa dá vyjadriť v tvare $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}$, kde $\mathbf{C}$ je vhodný konštantný vektor.